ベイズリスクに関する積分バッタチャリャ型不等式について(漸近的統計理論)

数理解析研究所講究録 1308 巻 2003 年 99-111

ベイズリスクに関する積分バッタチャリャ型不等式について

筑波大 数学系 小池 健一 (Ken-ichi Koike)
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba

1. はじめに

クラーメル・ラオ型の不等式の応用として，Borovkov and Sakhanienko[1], Brown and Gajek[2] 等は二乗誤差の下でのベイズリスクに関する下界を与え，さらに，ミニマックスリスクに関する下界について論じた (Prakasa Rao[3], Ghosh[4], Sato and Akahira[5], Takada[6],Koike[7] 参照). しかしながら，これらの下界が実際に達成されるようなことは，ほとんどない. 一方，不偏推定量の分散に関するバッタチャリャ型の下界が，クラーメル・ラオ型の不等式で与えられる下界を改良し，しかも次数を上げれば，一定条件下では局所最小分散不偏推定量の分散に収束することが知られている.

ここでは，ベイズリスクに関する積分バッタチャリャ型の不等式を示し，応用例として，局所ミニマックスリスクの下界の漸近近似について述べる.

2. ベイズリスクに対する下界

$X_1, \ldots, X_n$ を，互いに独立に，いずれも（σ-有限測度 μ に関する）密度関数 $f_1(x,t)$ $(t \in \Theta)$ に従う確率変数列とする. ただし，Θ は，端点 a, b $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ をもつ実数の区間とする. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ とおく. $\mathrm{supp}(g)$ を Θ 上の関数 g の台とする. ここでは，二乗誤差 $L(t,a) = (a - g(t))^2$ の下で，Θ 上で三回微分可能な関数 g のベイズ推定問題を考える.

次の条件を仮定する.

(A0) ほとんどすべての x について，$f_1(x,t)$ は t について二回微分可能.

(A1) フィッシャー情報量: $I(t) = \int \frac{\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} f_1(x,t)\right\}^2}{f_1(x,t)} d\mu$ が存在し，$0 < I(t) < \infty$ $(t \in \Theta)$ であって，連続微分可能で，その微分が上式右辺においては積分記号下で行える.

(A2) t の（ルベーグ測度に関する）事前密度 q は 3 回微分可能で，$\mathrm{supp}(q) \subset \Theta$.

このとき，t の関数 $g(t)$ の推定量 $\hat{g}$ に対するベイズリスクを

$$B(\hat{g}, q) := \int_\Theta E_t\{L(t, \hat{g})\} q(t) dt$$

とすると次を得る.

定理 1. $\hat{g}(\mathbf{X})$ を $g(t)$ の推定量，h を $\mathrm{supp}(h) \subset \mathrm{supp}(q)$ を満たす Θ 上の微分可能な関数とする．ほとんどすべての x について，$t = a, b$ において $h(t)f_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\{h(t)f_1(x,t)\} = 0$ であるとき，条件 (A0) - (A2) の下で次が成り立つ.

$$B(\hat{g}, q) \geq \left(E\left(\frac{g'h}{q}\right), -E\left(\frac{g''h}{q}\right)\right) V^{-1} \left(E\left(\frac{g'h}{q}\right), -E\left(\frac{g''h}{q}\right)\right)'. \tag{2.1}$$

ただし，$V = \{E(S_iS_j)\}_{i,j=1,2}$ は 2×2 行列で $E(S_1^2) = nE(h^2I/q^2) + E\left\{(h'/q)^2\right\}$,
$E(S_1S_2) = n\left[E\left\{(h/q)^2 E_t(f_1'f_1''/f_1^2)\right\} + 2E(Ihh'/q^2)\right] + E(h'h''/q^2)$,
$E(S_2^2) = 2n^2E\left\{(Ih/q)^2\right\}$
$+n\left[E\left\{(h/q)^2 E_t(f_1''/f_1)^2\right\} - 2E\left\{(Ih/q)^2\right\} + 4E\left(Ih'^2/q^2\right) + 4E\left\{hh'/q^2E_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)\right\}\right]$
$+E\left\{(h''/q)^2\right\}$ とする.

証明. $S_i = \{f(x,t)q(t)\}^{-1}(\partial^i/\partial t^i)\{f(x,t)h(t)\}$ $(i = 1, 2)$ とおく．確率ベクトル $(\hat{g} - g, S_1, S_2)$ の共分散行列 U は次で与えられる：

$$U = \begin{pmatrix} E\{(\hat{g}-g)^2\} & E(g'h/q) & -E(g''h/q) \\ E(g'h/q) & E(S_1^2) & E(S_1S_2) \\ -E(g''h/q) & E(S_1S_2) & E(S_2^2). \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

実際，部分積分を用いれば

$$\int_\Theta \frac{\partial}{\partial t}\{f(x,t)h(t)\} dt = [f(x,t)h(t)]_a^b = 0,$$
$$\int_\Theta g(t)\frac{\partial}{\partial t}\{f(x,t)h(t)\} dt = -\int_\Theta g'(t)f(x,t)h(t)dt$$

となるから，

$$\begin{aligned}E\{(\hat{g}-g)S_1\} &= \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta}(\hat{g}-g)\frac{\partial}{\partial t}\{f(x,t)h(t)\}\,dtd\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}}\hat{g}\int_{\Theta}\frac{\partial}{\partial t}\{f(x,t)h(t)\}\,dtd\mu - \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta}g\frac{\partial}{\partial t}\{f(x,t)h(t)\}\,dtd\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta}g'(t)f(x,t)h(t)dtd\mu \\ &= \int_{\Theta}g'(t)h(t)\int_{\mathcal{X}}f(x,t)d\mu dt \\ &= \int_{\Theta}g'(t)h(t)dt = E\left(\frac{g'h}{q}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

を得る．同様に, $t=a,b$ に対して $(\partial/\partial t)\{f(x,t)h(t)\}=0$ となるから

$$\begin{aligned}&E\{(\hat{g}-g)S_2\} \\ &= \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta}(\hat{g}-g)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f(x,t)h(t)\}\,dtd\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}}\hat{g}\int_{\Theta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f(x,t)h(t)\}\,dtd\mu - \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta}g\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{f(x,t)h(t)\}\,dtd\mu \\ &= \int_{\mathcal{X}}\hat{g}\left[\frac{\partial}{\partial t}\{f(x,t)h(t)\}\right]_a^b d\mu + \int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta}g'\frac{\partial}{\partial t}\{f(x,t)h(t)\}dtd\mu \\ &= -\int_{\mathcal{X}}\int_{\Theta}g''(t)f(x,t)h(t)d\mu dt \\ &= -\int_{\Theta}g''(t)h(t)\int_{\mathcal{X}}f(x,t)d\mu dt \\ &= -\int_{\Theta}g''hdt = -E\left(\frac{g''h}{q}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

を得る．一方，Borovkov and Sakhanienko[1] から

$$E(S_1^2) = nE\left(\frac{h^2 I}{q^2}\right) + E\left\{\left(\frac{h'}{q}\right)^2\right\} \tag{2.5}$$

である．$L' = \{f(x,t)\}^{-1}(\partial/\partial t)f(x,t)$, $L'' = \{f(x,t)\}^{-1}(\partial^2/\partial^2 t)f(x,t)$ とおくと，条件

(A1) から $E_t(L')=E_t(L'')=0$ となるから

$$\begin{aligned}
E(S_1S_2) &= E\left\{\left(L'\frac{h}{q}+\frac{h'}{q}\right)\left(L''\frac{h}{q}+2L'\frac{h'}{q}+\frac{h''}{q}\right)\right\}\\
&= E\left\{L'L''\left(\frac{h}{q}\right)^2+2L'^2\frac{hh'}{q^2}+L'\frac{hh''}{q^2}\right.\\
&\qquad \left.+L''\frac{hh'}{q^2}+2L'\left(\frac{h'}{q^2}\right)^2+\frac{h'h''}{q^2}\right\}\\
&= E\left\{L'L''\left(\frac{h}{q}\right)^2+2L'^2\frac{hh'}{q^2}+\frac{h'h''}{q^2}\right\},
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
E\left(S_2^2\right) &= E\left\{\left(L''\frac{h}{q}+2L'\frac{h'}{q}+\frac{h''}{q}\right)^2\right\}\\
&= E\left\{L''^2\left(\frac{h}{q}\right)^2+4L'^2\left(\frac{h'}{q}\right)^2+4L'L''\frac{hh'}{q^2}\right.\\
&\qquad \left.+2L''\frac{hh''}{q^2}+4L'\frac{h'h''}{q^2}+\left(\frac{h''}{q}\right)^2\right\}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

を得る．L' と L'' の定義から

$$\begin{aligned}
L' &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(x_i,t),\\
L'' &= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log f_1(x_i,t)+\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(x_i,t)\right\}^2,
\end{aligned}$$

であるから

$$E_t(L'^2)=E_t\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(X_i,t)\right\}^2=nI(t), \tag{2.8}$$

$$
\begin{aligned}
E_t(L'L'') &= E_t\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log f_1(X_i,t)\right\}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(X_i,t)\right\}\right.\\
&\qquad\left.+\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(X_i,t)\right\}^3\right]\\
&= nE_t\left[\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log f_1(X_i,t)\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(X_i,t)\right\}\right]\\
&\qquad+nE_t\left[\left\{\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(X_i,t)\right\}^3\right]\\
&= nE_t\left\{\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}-\left(\frac{f_1'}{f_1^2}\right)^3\right\}+nE_t\left\{\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^3\right\},\\
&= nE_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

となる．ただし，$f_1' = \partial f(X_i,t)/\partial t$, $f_1'' = \partial^2 f(X_i,t)/\partial t^2$ とする．

全く同様に，$E(L''^2)$ に対して

$$
\begin{aligned}
E_t\left(L''^2\right) &= E_t\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log f_1(X_i,t)\right\}^2+\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(X_i,t)\right\}^4\right.\\
&\qquad\left.+2\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t}\log f_1(X_i,t)\right\}^2\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\log f_1(X_i,t)\right\}\right]\\
&= nE_t\left\{\left(\frac{f_1''}{f_1}\right)^2-2\frac{f_1'f_1''}{f_1}+\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^4\right\}\\
&\qquad+nE_t\left\{\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^4\right\}+3n(n-1)I^2\\
&\qquad+2\left[nE_t\left\{\frac{f_1'^2f_1''}{f_1}-\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^4\right\}-n(n-1)I^2\right]
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

となる．(2.8), (2.9) , (2.10) から, (2.6) と (2.7) の右辺は，それぞれ

$$E(S_1S_2) = nE\left\{E_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)\left(\frac{h}{q}\right)^2 + 2I\frac{hh'}{q^2}\right\} + E\left\{\frac{h'h''}{q^2}\right\}, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} E\left(S_2^2\right) = 2n^2E\left\{\left(\frac{Ih}{q}\right)^2\right\} + nE\Bigg[\left(\frac{h}{q}\right)^2 E_t\left\{\left(\frac{f_1''}{f_1}\right)^2\right\} \\ -2\left(\frac{Ih}{q}\right)^2 + 4I\left(\frac{h'}{q}\right)^2 + 4E_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)\frac{hh'}{q^2}\Bigg] \\ + E\left\{\left(\frac{h''}{q}\right)^2\right\} \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる．一方，U は非負値行列なので

$$\begin{aligned} |U| =&|V|\big|E\{(\hat{g}-g)^2\} - \left(E(g'h/q), -E(g''h/q)\right)V^{-1} \\ &\cdot \left(E(g'h/q), -E(g''h/q)\right)'\big| > 0 \end{aligned}$$

となる．ただし，$V = \{E(S_iS_j)\}_{i,j=1,2}$ とする．すると

$$\begin{aligned} B(\hat{g}, q) =&E\{(\hat{g}-g)^2\} \\ &\geq \left(E(g'h/q), -E(g''h/q)\right)V^{-1}\left(E(h/q), -E(g''h/q)\right)' \end{aligned} \tag{2.13}$$

であるから, (2.3), (2.4), (2.5), (2.11), (2.12), (2.13) より与式を得た． □

系．$h = g'q/I$ が微分可能で $\mathrm{supp}(h) \subset \mathrm{supp}(q)$ をみたすとき, 条件 (A0) - (A2) の下で次が成り立つ．

$$B(\hat{g}, q) \geq \left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I}dt, -\int_\Theta \frac{g'g''q}{I}dt\right)\tilde{V}^{-1}\left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I}dt, -\int_\Theta \frac{g'g''q}{I}dt\right)', \tag{2.14}$$

ただし, $\tilde{V} = \{E(S_iS_j)\}_{i,j=1,2}$ は 2×2 行列で,
$E\left(S_1^2\right) = n\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I}dt + \int_\Theta \frac{1}{q}\left(g''\frac{q}{I} + g'\left(\frac{q}{I}\right)'\right)^2 dt$,
$E(S_1S_2) = n\left[\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I^2}\int_\mathcal{X} \frac{f_1'f_1''}{f_1}d\mu dt - 2\int_\Theta \frac{g'g''q}{I}dt\right] + \int_\Theta \frac{1}{q}\left(\frac{g''q}{I} + g'\left(\frac{q}{I}\right)'\right)$
$\cdot\left(\frac{g'''q}{I} + 2g''\left(\frac{q}{I}\right)' + g'\left(\frac{q}{I}\right)''\right)dt$, $E(S_2^2) = 2n^2\int_\Theta g'^2 q dt + n\Big[\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I^2}\int_\mathcal{X}\frac{f_1''^2}{f_1}d\mu - 2\int_\Theta g'^2 q dt +$
$4\int_\Theta \frac{I}{q}\left(\frac{g''q}{I} + g'\left(\frac{q}{I}\right)'\right)^2 dt + 4\int_\Theta \frac{g'}{I}\left(\frac{g''q}{I} + g'\left(\frac{q}{I}\right)'\right)\int_\mathcal{X}\frac{f_1'f_1''}{f_1}d\mu dt\Big]$

$+\int_\Theta \frac{1}{q}\left(\frac{g'''q}{I}+2g''\left(\frac{q}{I}\right)'+g'\left(\frac{q}{I}\right)''\right)^2 dt$ とする．また，(2.14) の漸近近似は

$$\left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I}dt\right)n^{-1}+\left\{-\int_\Theta\left(\frac{g''q}{I}+g'\left(\frac{q}{I}\right)'\right)^2\frac{dt}{q}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\int_\Theta g'^2 q dt}\left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I^2}\int_{\mathcal{X}}\frac{f_1' f_1''}{f_1}d\mu dt-\int_\Theta\frac{g'g''q}{I}dt\right)^2\right\}n^{-2}+O\left(n^{-3}\right)\quad(n\to\infty)$$
(2.15)

で与えられる．

証明．　(前半) (2.1) に $h=g'q/I$ を代入すると与式を得る．
(後半) (2.14) の右辺に対して，$n\to\infty$ としたときの漸近近似は

$$\left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I}dt\right)n^{-1}+\left\{-\int_\Theta \frac{h'^2}{q}dt\right.$$
$$+\frac{1}{2\int_\Theta g'^2 q dt}\left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I^2}\int_{\mathcal{X}}\frac{f_1' f_1''}{f_1}d\mu dt+2\int_\Theta \frac{g'h'}{q}dt\right)^2$$
$$\left.+\frac{\int_\Theta \frac{g'g''q}{I}dt}{2\int_\Theta g'^2 q dt}\left(2\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I^2}\int_{\mathcal{X}}\frac{f_1' f_1''}{f_1}d\mu dt+4\int_\Theta g'h'dt+\int_\Theta\frac{g'g''q}{I}dt\right)\right\}n^{-2}$$
$$+O\left(n^{-3}\right)$$

となる．ここで，部分積分から

$$\int_\Theta g'h'dt=-\int_\Theta\frac{g'g''q}{I}dt$$

となるので，与式を得た．　□

注意. (1) 特に $g=\theta$ を代入すると, (2.15) は

$$\left(\int_\Theta \frac{q}{I}dt\right)n^{-1}+\left\{-\int_\Theta \frac{1}{q}\left(\frac{q}{I}\right)'^2 dt+\frac{1}{2}\left(\int_\Theta \frac{q}{I^2}\int_{\mathcal{X}}\frac{f_1' f_1''}{f_1}d\mu dt\right)^2\right\}n^{-2}$$
$$+O\left(n^{-3}\right)$$

(2) (2.15) と同様の近似を Borovkov-Sakhanienko の不等式に適用すれば，$n \to \infty$ のとき

$$
\begin{aligned}
B(\hat{g}, q) \geq & \frac{\left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I} dt\right)^2}{n \int_\Theta \frac{g'^2 q}{I} dt + \int_\Theta \frac{h'^2}{q} dt} \\
= & \left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I} dt\right) n^{-1} + \left(-\int_\Theta \frac{h'^2}{q} dt\right) n^{-2} + o\left(n^{-2}\right) \\
= & \left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I} dt\right) n^{-1} + \left\{-\int_\Theta \frac{1}{q}\left(\frac{g'' q}{I} + g'\left(\frac{q}{I}\right)'\right)^2 dt\right\} n^{-2} + O\left(n^{-3}\right) \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$h = g'q/I$ とする．従って，n^{-1} の係数は (2.15) のものと (2.16) のものとで一致し，n^{-2} の係数での両者の差は

$$
\frac{1}{2\int_\Theta g'^2 q dt}\left(\int_\Theta \frac{g'^2 q}{I^2} \int_{\mathcal{X}} \frac{f_1' f_1''}{f_1} d\mu dt - \int_\Theta \frac{g' g'' q}{I} dt\right)^2 n^{-2} \geq 0
$$

となる．

3. 例

ここでは定理 1 と系に関する例を挙げる．

例 3.1. $X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に，いずれも平均 t, 分散 1 の正規分布 $N(t,1)$ に従う確率変数列とする．ここでは t の事前分布が $N(\mu, \sigma^2)$ であるときの，$g(t) = t^2$ のベイズ推定を考える．$X_1, \ldots, X_n$ を与えたときの t の事後分布は $N\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i + (\mu/\sigma^2)}{n + (1/\sigma^2)}, \frac{1}{n + (1/\sigma^2)}\right)$ となる．従って $g(t) = t^2$ のベイズ推定量は

$$
\hat{g} = E\left(t^2 | X_1, \ldots, X_n\right) = \frac{1}{n + (1/\sigma^2)} + \left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i + (\mu/\sigma^2)}{n + (1/\sigma^2)}\right\}^2
$$

となる．簡単な計算によって

$$
\begin{aligned}
E\left\{(\hat{g} - t^2)^2\right\} = & \frac{2\sigma^2(2n\sigma^4 + 2\mu^2\sigma^2 n + 2\mu^2 + \sigma^2)}{(n\sigma^2 + 1)^2} \\
= & 4(\mu^2 + \sigma^2)n^{-1} + \frac{-2(2\mu^2 + 3\sigma^2)}{\sigma^2} n^{-2} + O\left(n^{-3}\right) \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

を得る．一方，$g'(t) = 2t$, $I(t) = E_t\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\log f_1\right)^2\right\} = 1$, $\int \frac{f_1' f_1''}{f_1} dx = 0$ であるから (2.15) と (2.16) の右辺は，それぞれ

$$
\begin{aligned}
(2.15):\quad & 4(\mu^2 + \sigma^2)n^{-1} + \left\{-4\left(2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2}\right) + \frac{2\mu^2}{(\mu^2 + \sigma^2)}\right\} n^{-2} + O\left(n^{-3}\right), \\
(2.16):\quad & 4(\mu^2 + \sigma^2)n^{-1} - 4\left(2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2}\right) n^{-2} + O\left(n^{-3}\right)
\end{aligned}
$$

となる $(n \to \infty)$. $\hat{g}$ のベイズリスクと (2.15) との差は

$$\left(2 - \frac{2\mu^2}{\mu^2 + \sigma^2}\right) n^{-2} + O\left(n^{-3}\right) \geq 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．よって，n^{-2} の係数は $|\mu| \to \infty$ または $\sigma^2 \to 0$ とすれば 0 に収束する．しかし，$\hat{g}$ のベイズリスクと (2.16) との差は $2n^{-2} + O(n^{-3})$ $(n \to \infty)$ となり，n^{-2} の係数の下限は 2 である．

例 3.2. $X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に，いずれも密度関数

$$f_1(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

に従う確率変数列とする．ただし，$\lambda \in \Theta = (0, \infty)$ は未知母数とする．λ の事前密度を q とし，

$$q(\lambda; p, a) = \begin{cases} \frac{a^p}{\Gamma(p)} \lambda^{p-1} e^{-a\lambda} & (\lambda > 0), \\ 0 & (\lambda \leq 0) \end{cases}$$

とする．ただし，$a, p > 0$ とする．よく知られているように，$T_n = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$ は λ に対する十分統計量で，その密度関数は

$$f_{T_n}(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-n\lambda x} & (x > 0), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

で与えられる．ここでは，信頼度関数

$$R(c) = P(X_1 \geq c) = e^{-c\lambda} \quad (c > 0)$$

の推定問題を考える．$R(c)$ のベイズ推定量は，事後分布に関する $e^{-c\lambda}$ の条件付き期待値で与えられ

$$\hat{R} = \left(\frac{nT_n + a}{nT_n + a + c}\right)^{n+p}$$

(参照 Antoch et al.[8]) となる．$\hat{R}$ のベイスリスクの直接計算は困難であるため，Antoch et al.[8] はその近似値を求めた．ここでは，そのベイズリスクと定理の系で与えた下界とを近似の面から検討する．

$g(\lambda) = e^{-c\lambda}$ とおく．簡単な計算によって $g'(\lambda) = -ce^{-c\lambda}$, $I = -E_\lambda\{\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log f_1(X_1, \lambda)\} =$

$1/\lambda^2$ となり

$$\int_0^\infty \frac{g'^2 q}{I} d\lambda = \frac{a^p c^2 p(p+1)}{(a+2c)^{p+2}},$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{g'' q}{I} + g' \left(\frac{q}{I} \right)' \right)^2 \frac{d\lambda}{q}$$

$$= \frac{a^p c^2 p(p+1)}{(a+2c)^{p+2}} \left(3a^2 + 4ac + 2c^2 + p^2 c^2 + pa^2 + pc^2 \right),$$

$$\int_0^\infty g'^2 q d\lambda = \frac{a^p c^2}{(a+2c)^p},$$

$$\int_0^\infty \frac{g'^2 q}{I^2} \int_0^\infty \frac{f_1' f_1''}{f_1} d\mu d\lambda = -2 \frac{a^p c^2 p}{(a+2c)^{p+1}},$$

$$\int_0^\infty \frac{g' g'' q}{I} d\lambda = -\frac{a^p c^3 p(p+1)}{(a+2c)^{p+2}}$$

を得る．よって，近似式 (2.15) と (2.16) は，それぞれ

$$\begin{aligned}
(2.15): &\frac{a^p c^2 p(p+1)}{(a+2c)^{p+2}} n^{-1} + \frac{a^p c^2 p(p+1)}{2(a+2c)^{p+4}} \{ -c^2 p^2 - p(a^2 + c^2) \\
&- 3a^2 - 2c^2 - 4ac \} n^{-2} + \frac{a^p c^2 p^2}{2(a+2c)^{p+4}} (-2a - 3c + cp)^2 n^{-2} \\
&\qquad + O\left(n^{-3}\right) \\
=& \frac{a^p c^2 p(p+1)}{(a+2c)^{p+2}} n^{-1} + \frac{a^p c^2 p}{2(a+2c)^{p+4}} \{ -c^2 p^3 - 2p^2 (a^2 + 5c^2 + 2ac) \\
&+ p(-4a^2 + 3c^2 + 4ac) - 6a^2 - 8ac - 4c^2 \} n^{-2} + O\left(n^{-3}\right), \qquad (3.1) \\
(2.16): &\frac{a^p c^2 p(p+1)}{(a+2c)^{p+2}} n^{-1} + \frac{a^p c^2 p(p+1)}{2(a+2c)^{p+4}} \{ -c^2 p^2 - p(a^2 + c^2) \\
&- 3a^2 - 2c^2 - 4ac \} n^{-2} + O\left(n^{-3}\right),
\end{aligned}$$

となる．一方，ベイズリスクの漸近近似は

$$\begin{aligned}
&\frac{a^p c^2 p(p+1)}{(a+2c)^{p+2}} n^{-1} + \frac{a^p c^2 p(p+1)}{2(a+2c)^{p+4}} \\
&\cdot \{ -c^2 p^2 - p(2a^2 + 5c^2 + 4ac) - 2a^2 + 2c^2 \} n^{-2} + O(n^{-3}) \quad (n \to \infty) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

(Antoch et al.[8] を参照) となり，(3.1) と (3.2) の n^{-2} の係数の差は

$$\frac{a^p c^2 p}{2(a+2c)^{p+4}} \{ 4(a - cp + c)^2 + 2c^2 p + 2c^2 \} > 0$$

となる $(a, c, p > 0)$．従って，下界 (3.1) は (2.18) を改良するが，$\hat{R}$ のベイズリスク (3.2) を達成しない．

4. 局所ミニマックスリスクに対する下界

ここでは，t のミニマックス推定を考える．定理 1 の条件下で

$$j(t) := E_t\left\{-3\frac{f_1'f_1''}{f_1^2} + 2\left(\frac{f_1'}{f_1^3}\right)^3\right\}$$

とおく．このとき，局所ミニマックスリスクについて次を得る．

定理 2. $\varepsilon > 0$ と $a > 0$ があって，$t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ について

$$0 < a \le j(t) \quad \text{または} \quad j(t) < -a \le 0 \tag{4.1}$$

を満たすとする．$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset \Theta$ であるとき，条件 (A0) - (A2) の下で，t_0 におけるミニマックスリスクは，

$$\sup_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} E_t\left\{(\hat{t}-t)^2\right\} \ge \frac{1}{I^*}n^{-1} + \left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 I_*^2} + \frac{a^2}{2I^{*3}}\right)n^{-2} + O\left(n^{-3}\right) \quad (n \to \infty) \tag{4.2}$$

となる．ただし，$\hat{t}$ は t の推定量で，$I^* = \sup_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} I(t)$, $I_* = \inf_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)} I(t)$ とする．

証明． $g = t$ と $h = q$ を (2.1) に代入すると，定理 1 の条件を満たす $\hat{t}$ と q について

$$\begin{aligned} B(\hat{t}, q) \ge & \frac{1}{E(I)}n^{-1} - \frac{E(q'/q)^2}{(E(I))^2}n^{-2} \\ & + \frac{1}{2(E(I))^2 E(I^2)}\left\{E\left(E_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)\right) + 2E\left(\frac{Iq'}{q}\right)\right\}^2 n^{-2} \\ & + O(n^{-3}) \quad (n \to \infty) \end{aligned} \tag{4.3}$$

となる．条件 (A1) の下で，部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}I(t) =& \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{f_1'^2}{f_1}d\mu = \int \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{f_1'^2}{f_1}\right)d\mu \\ =& 2\int \frac{f_1'f_1''}{f_1}d\mu - \int \frac{f_1'^3}{f_1^2}d\mu, \end{aligned}$$

だから

$$E\left(\frac{Iq'}{q}\right) = -2E\left(E_t\left(\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}\right)\right) + E\left(E_t\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^3\right)$$

となる．よって (4.3) の右辺は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{E(I)}n^{-1}-\frac{E(q'/q)^2}{(E(I))^2}n^{-2}\\&\quad+\frac{1}{2\,(E(I))^2\,E(I^2)}\left\{E\left(E_t\left(-3\frac{f_1'f_1''}{f_1^2}+2\left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^3\right)\right)\right\}^2 n^{-2}\\&\quad+O(n^{-3})\\&\geq\frac{1}{I^*}n^{-1}-\frac{E(q'/q)^2}{I_*^2}n^{-2}+\frac{a^2}{2I^{*3}}n^{-2}+O(n^{-3})\quad(n\to\infty)\end{aligned}\tag{4.4}$$

となる．$q(t)=\frac{1}{\varepsilon}\cos^2\frac{\pi(t-a)}{2\varepsilon}$ $(|t-t_0|\leq\varepsilon)$ とおけば, (4.4) の右辺は

$$\frac{1}{I^*}n^{-1}-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2I_*^2}n^{-2}+\frac{a^2}{2I^{*3}}n^{-2}+O(n^{-3})\quad(n\to\infty)$$

となる．q を $\mathrm{supp}(q)\subset(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ を満たす事前密度とすれば，一般に

$$\sup_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}E_t\left\{(\hat{t}-t)^2\right\}\geq B(\hat{t},q),$$

となるので，与式を得た． □

注意. (1) 証明中で与えた $q(t)=\frac{1}{\varepsilon}\cos^2\frac{\pi(t-a)}{2\varepsilon}$ は，$\int\frac{q'^2}{q}dt$ の最小値を与えている (Ghosh[4], Borovkov[9] を参照).

(2) 条件 (4.1) は，$j(t)$ が連続で, $j(t_0)\neq0$ で $\varepsilon>0$ が十分小ならば満たされる．

(3) Borovkov[9] は同様の下界を与えた: t の推定量 $\hat{t}$ について

$$\sup_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}E_t\left\{(\hat{t}-t)^2\right\}\geq\frac{1}{nE(I)+\pi^2/\varepsilon^2}$$

が成り立つ．ただし，右辺分母の期待値 $E(\cdot)$ は $\mathrm{supp}(q)\subset(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$ を満たす q についてとるものとする．これより

$$\sup_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}E_t\left\{(\hat{t}-t)^2\right\}\geq\frac{1}{I^*}n^{-1}-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2I_*^2}n^{-2}+O\left(n^{-3}\right)\quad(n\to\infty).\tag{4.5}$$

となり，従って，下界 (4.2) は (4.5) を n^{-2} のオーダーまで改良することが分かる．

t を与えたときの X の（σ-有限測度 μ に関する）密度関数を，$\exp\{a(t)T(x)-\gamma(t)\}$ とする．ただし，$a(t)$ は t の 3 回連続微分可能な関数で，$a'(t)\neq0$ を満たすとする．すると，簡単な計算により，$j(t)=\frac{a'''(t)}{a'(t)}\gamma'(t)-\gamma'''(t)$ となる．

条件 (4.1) が満たされないとき，(4.4) の左辺から，(4.2) は次で置き換えられる：

$$\sup_{t\in(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}E_t\left\{(\hat{t}-t)^2\right\}\geq\frac{1}{I^*}n^{-1}-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2I_*^2}n^{-2}+O\left(n^{-3}\right)\quad(n\to\infty).$$

しかし，これは (4.5) の右辺と一致してしまう．

例えば，$X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立に，いずれも $N(t, 1)$ に従う確率変数列とすると，$a(t) = t$, $\gamma(t) = t^2/2$ となるから $j(t) = 0$ となる．

参考文献

1. Borovkov, A. A. and Sakhanienko, A. U. (1980). On estimates of the expected quadratic risk (in Russian). *Probab. Math. Statist.*, **1**, 185–195.

2. Brown, L. D. and Gajek, L. (1990). Information inequalities for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **18**, 1578–1594.

3. Prakasa Rao, B. L. S. (1992). Cramer-Rao type integral inequalities for estimators of multidimensional parameter. *Sankhyā Ser. A*, **54**, 53–73.

4. Ghosh, J. K. (1994). *Higher Order Asymptotics.* NSF-CBMS Regional Conference Series in Probability and Statistics, Vol.4, Inst. of Math. Statist., Hayward.

5. Sato, M. and Akahira, M. (1996). An information inequality for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **24**, 2288–2295.

6. Takada, Y. (1999). Lower bounds on the Bayes risk for statistical prediction. *Commun. Statist.-Theory Meth.* **28**, 693–703.

7. Koike, K. (1999). A lower bound for the Bayes risk in the sequential case. *Commun. Statist.-Theory Meth.* **28**, 857–871.

8. Antoch, J., Brzezina, M. and Linka, A. (1997). Asymptotic approximation of Bayes risk of estimators of reliability for exponentially distributed data. *Statistics & Decisions* **15**, 241–253.

9. Borovkov, A. A. (1998). *Mathematical Statistics.* Gordon and Breach.